Analytische Geometrie

Kreisaufgaben

Sammlung von umfassenden Aufgaben

Die meisten Aufgaben werden sowohl vektoriell
als auch alternativ ohne Verwendung der Vektorrechnung
gelöst

Datei Nr. 67611

Stand 4. Juni 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Aufgabe 611

Gegeben sind die Eckpunkte $A(-2\,|\,0)$, $B(7\,|\,-3)$ und $C(0\,|\,4)$ eines Dreiecks.

a) Berechne den Dreiecksinhalt sowie den Innenwinkel α bei A.

b) Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises U von ABC.
Wie lautet die Kreisgleichung? (Erg.: $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$)

c) Lege die Tangenten parallel zur Geraden AC an den Kreis U.
Bestimme die Berührpunkte sowie die Tangentengleichungen.

d) Spiegelt man die Punkte A und B am Kreismittelpunkt M, so erhält man die Punkte A' und B' . Berechne deren Koordinaten.

e) Bestimme die Art des Vierecks AA'BB' und seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 612

Gegeben ist ein Kreis K_1 durch die Gleichung $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 27 = 0$

a) Bestimme Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 von K_1.

Zeige, dass $A(2\,|\,3)$ auf K_1 liegt.
Stelle die Gleichung der Tangente T_1 an K_1 in A auf. (Erg.: $y = -x + 5$)

b) Welchen Radius hat ein Kreis um $M_2(1\,|\,-2)$, der T_1 auch berührt?
Berechne den zugehörenden Berührpunkt B.

c) Beide Kreise haben eine weitere gemeinsame Tangente.
Stelle deren Gleichung auf und ermittle die Koordinaten der beiden Berührpunkte A' und B'.
Fertige eine Zeichnung an!

d) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte $S_{1,2}$ beider Kreise.

Aufgabe 613

Gegeben sind die Punkte $A(2|6)$ und $B(-6|0)$.

a) Es gibt zwei Kreise K_1 und K_2 mit Radius $\sqrt{50}$, die durch A und B gehen. Berechne ihre Mittelpunkte. (Anleitung: Sie liegen auf der Mittelsenkrechten h von A und B)

b) Der Kreis K_O : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 48 = 0$ und die Gerade g: $y = -\frac{1}{2}x + 7$ besitzen zwei gemeinsame Punkte S_1 und S_2. Berechne ihre Koordinaten.

c) Lege an K_O die Tangenten T_1 und T_2 durch diese Punkte S_1 und S_2. Welche Gleichungen haben sie?

d) Welchen Inhalt hat das Dreieck $M_O S_1 S_2$?

e) Lege von $Q(2|10)$ die Tangenten an K_O.
Berechne die Koordinaten der Berührpunkte und die Tangentengleichung in dem Berührpunkt, der ganzzahlige Koordinaten hat.

Aufgabe 614

Gegeben ist ein Kreis K durch seine Gleichung $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$
Sowie eine Gerade g durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 2$.

a) Ermittle Mittelpunkt und Radius des Kreises.

b) Zeige, dass sich g und K schneiden.

c) Berechne die Länge der von K und g erzeugten Sehne ohne deren Schnittpunkte S_1 und S_2 zu verwenden !

d) Berechne (vektoriell) die Gleichung der zu g parallelen Kreistangenten und die Koordinaten der zugehörenden Berührpunkte B_1 und B_2.

e) Die Punkte B_1, B_2, S_2 und S_2 bilden einen Drachen. Berechne dessen Flächeninhalt **A**.

f) Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises des Dreiecks OAB mit $A(2|-2)$ und $B(6|2)$.

Aufgabe 615

Gegeben ist ein Kreis K durch seine Gleichung $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$
Sowie eine Gerade g durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 2$.

a) Ermittle Mittelpunkt und Radius des Kreises.

b) Zeige, dass sich g und K schneiden.

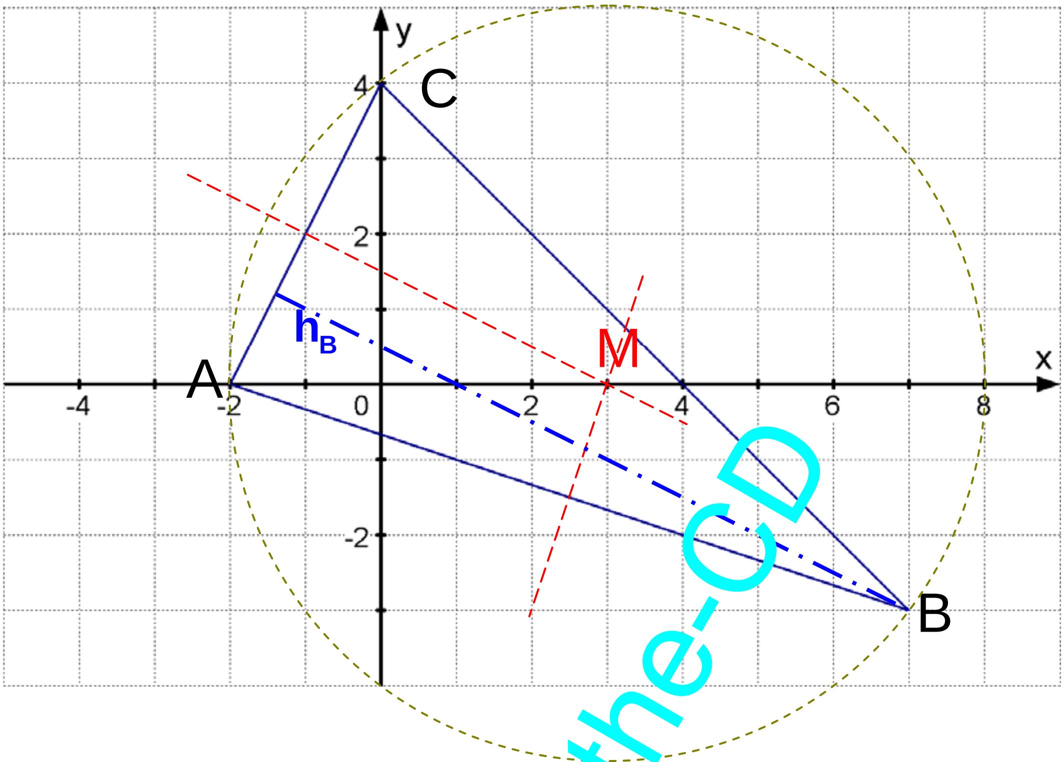
c) Berechne die Länge der von K und g erzeugten Sehne ohne deren Schnittpunkte S_1 und S_2 zu verwenden !

d) Berechne (vektoriell) die Gleichung der zu g parallelen Kreistangenten und die Koordinaten der zugehörenden Berührpunkte B_1 und B_2.

e) Die Punkte B_1, B_2, S_2 und S_2 bilden einen Drachen. Berechne dessen Flächeninhalt **A**.

f) Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises des Dreiecks OAB mit $A(2\,|-2)$ und $B(6\,|\,2)$.

Lösung 611



a) **Inhalt des Dreiecks ABC** mit $A(-2|0)$, $B(7|-3)$ und $C(0|4)$

(1) ***Nicht vektoriell:***

Grundseite (z. B.) AC; $\overline{AC} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ LE

Zur Berechnung der Höhe h_b müssen wir das Lot von B auf AC mit (AC) schneiden.

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m_L = -\frac{1}{2}$$

Gleichung der Gerade (AC): $y = 2x + 4$

(da C der Achsenabschnitt von (AC) mit der y-Achse darstellt)

Lotgerade L: $y + 3 = -\frac{1}{2}(x-7) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Schnitt: $(AC) \cap L = \{F\}$: $2x + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ergibt $x_F = -\frac{7}{5} \Rightarrow y_F = \frac{6}{5} \Rightarrow F\left(-\frac{7}{5} \middle| \frac{6}{5}\right)$.

Höhe $h_b = \overline{BF} = \sqrt{\left(\frac{42}{5}\right)^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 \cdot \left[2^2 + 1^2\right]} = \frac{21}{5} \cdot \sqrt{5}$ LE !!!!!!

Man beachte den Trick mit der Wurzelberechnung !

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{21}{5}\sqrt{5} = 21$ FE.

(2) ***Vektoriell:***

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ \text{LE}.$$

Normalenvektor zur Geraden (AC) ist z. B: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Er entsteht aus $\overrightarrow{AC}$ durch Vertauschen der Koordinaten, wobei dann bei einer von beiden das Vorzeichen geändert wird. Damit wird dann $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$!)

Die Koordinatengleichung der Geraden (AC) wird dann mit diesem Normalenvektor so aufgestellt: $\vec{n} \cdot \vec{x} = k \Leftrightarrow -4x + 2y = k$

Da $A \in (AC) \Rightarrow k = 8$ also: $(AC): \ -4x + 2y = 8$ bzw. $-2x + y = 4$

Die Höhe h_b von B auf AC berechnet man dann mit der Hesseschen Normalform von (AC): $\dfrac{-2x + y - 4}{\sqrt{5}} = 0$:

$$h_b = d(B;(AC)) = \frac{|-14-3-4|}{\sqrt{5}} = \frac{21}{\sqrt{5}}\ \text{LE}$$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{21}{\sqrt{5}} = 21\ \text{FE}$

__Berechnung des Innenwinkels__ α:

(1) Mit der Tangensformel nicht vektoriell:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_{AB} - m_{AC}}{1 + m_{AB} \cdot m_{AC}}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{3} \cdot 2\right)}\right| = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7 \Rightarrow \alpha \approx 81{,}9^{\circ}$$

Hierzu musste man zuvor die beiden Steigungen berechnen:

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2; \quad m_{AB} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

(2) In dieser Aufgabe wurde zuvor h_b berechnet. Diese Höhe zerlegt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke, also kann man im Dreieck ABF auch so vorgehen:

$$\sin\alpha = \frac{h_B}{\overline{AB}} = \frac{\frac{21}{5}\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{21}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 81{,}9^{\circ}$$

wobei zuvor berechnet werden muss:

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\ \text{LE}$$

(3) Vektoriell: $$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{20}} = \frac{18-12}{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10 \cdot 2}} = \frac{6}{3 \cdot 10 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Dies ergibt natürlich ebenso $\alpha \approx 81{,}9^{\circ}$.

b) Berechnung des Umkreismittelpunktes als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten.

(1) *Nicht vektoriell:*

Mittelpunkte: $M_{AB}\left(\tfrac{5}{2} \mid -\tfrac{3}{2}\right);\ M_{AC}(-1 \mid 2)$

Steigungen der Seiten: $m_{AB} = -\tfrac{1}{3};\quad m_{AC} = 2$

Steigungen der Mittelsenkrechten (negativer Kehrwert!):

$$m_{s_{AB}} = 3\ ;\ m_{s_{AC}} = -\tfrac{1}{2}$$

Gleichungen der Mittelsenkrechten mit der Punkt-Steigungsform:

$s_{AB}:\quad y + \tfrac{3}{2} = 3\left(x - \tfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = 3x - 9$

$s_{AC}:\quad y - 2 = -\tfrac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}$

Schnitt der Mittelsenkrechten in M:

$$3x - 9 = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}$$

$$\tfrac{7}{2}x = \tfrac{21}{2} \Rightarrow x_M = 3$$

Eingesetzt in s_{AB}: $y_M = 0 \Rightarrow M(3 \mid 0)$.

Radius des Umkreises: $r = \overline{AM} = x_M - x_A = 3 - (-2) = 5$ LE

Achtung: A und M liegen auf der x-Achse, daher keine Wurzelformel verwenden !

Gleichung des Umkreises: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

$$(x-3)^2 + y^2 = 25$$

(2) *Vektoriell:*

Berechnung der Mittelpunkte: $M_{AB}\left(\tfrac{5}{2} \mid -\tfrac{3}{2}\right);\ M_{AC}(-1 \mid 2)$

Seitenvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Normalenvektoren: Zu $\overrightarrow{AB}$: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, zu $\overrightarrow{AC}$: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gleichungen der Seitenhalbierenden:

$s_{AB}:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \tfrac{5}{2} \\ -\tfrac{3}{2} \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},\quad s_{AC}:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnitt der Seitenhalbierenden:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 3a + 4b = -\frac{7}{2} & (1) \\ 9a - 2b = \frac{7}{2} & (2) \end{matrix} \right\}$$

$(1) + 2 \cdot (2)$: $\quad 21a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2 \cdot 21} = \frac{1}{6}$.

Damit folgt aus s_{AB}: $\quad \vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(3|0)$

Radius des Kreises:

$$r = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 5$$

Kreisgleichung: $\quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$ bzw. $(x-3)^2 + y^2 = 25$.

c) Tangente an K parallel zu AC

(1) ***Nicht vektoriell:***

Steigung der Geraden (AC): $\quad m_{AC} = 2$.
Also hat auch die Tangente diese Steigung. $\quad y = 2x + n$.
Gemeinsame Punkte von Kreis und Tangente:

$$(x-3)^2 + (2x+n)^2 = 25$$
$$x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 4nx + n^2 = 25$$
$$5x^2 + (4n-6)x + (n^2-16) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(4n-6) \pm \sqrt{(4n-6)^2 - 20(n^2-16)}}{10} = \frac{-(4n-6) \pm \sqrt{16n^2 - 48n + 36 - 20n^2 + 320}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(4n-6) \pm \sqrt{-4n^2 - 48n + 356}}{10} \qquad (*)$$

Tangentenbedingung: Da eine Tangente mit einem Kreis nur einen gemeinsamen Punkt besitzt, muss der Radikand Null werden:

$$-4n^2 - 48n + 356 = 0 \quad |:(-4)$$
$$n^2 + 12n - 89 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 89}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{-12 \pm 10\sqrt{5}}{2} = -6 \pm 5\sqrt{5}$$

Tangentengleichungen: $\quad T_1: \quad y = 2x - 6 + 5\sqrt{5}$

$\quad T_2: \quad y = 2x - 6 - 5\sqrt{5}$

Die Berührpunkte folgen aus (*) mit Hilfe der Tangentenbedingung:

$$x_B = \frac{-(4n-6)\pm 0}{10} = \frac{-4n+6}{10} = -\frac{2}{5}n + \frac{3}{5}$$

Für $n_1 = -6 + 5\sqrt{5}$: $\quad x_{B,1} = -\tfrac{2}{5}\cdot\left(-6+5\sqrt{5}\right) + \tfrac{3}{5} = 3 - 2\sqrt{5}$

Für $n_1 = -6 - 5\sqrt{5}$: $\quad x_{B,2} = -\tfrac{2}{5}\cdot\left(-6-5\sqrt{5}\right) + \tfrac{3}{5} = 3 + 2\sqrt{5}$

Die zugehörigen y-Koordinaten erhält man aus der Tangentengleichung:

T_1: $\quad y = 2x - 6 + 5\sqrt{5}$ also $y_1 = 2\left(3-2\sqrt{5}\right) - 6 + 5\sqrt{5} = \sqrt{5}$

T_2: $\quad y = 2x - 6 - 5\sqrt{5}$ also $y_2 = 2\left(3+2\sqrt{5}\right) - 6 - 5\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

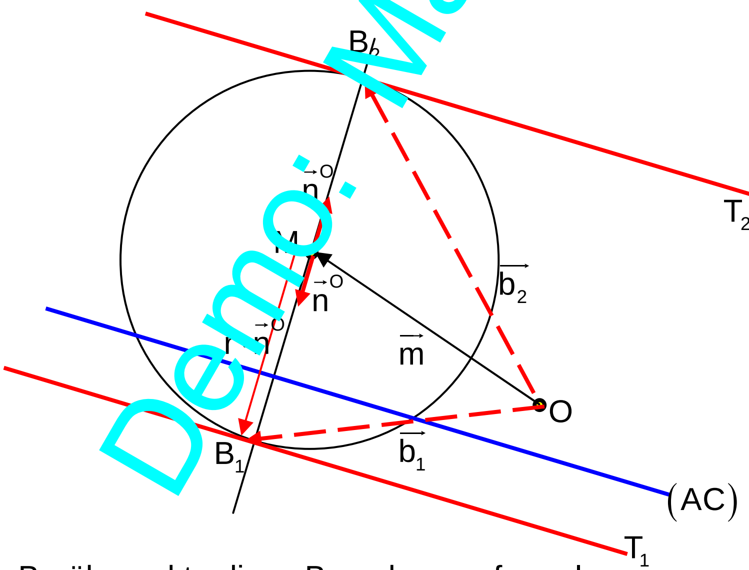
Ergebnis: $\quad B_1\left(3-2\sqrt{5} \mid \sqrt{5}\right),\ \ B_2\left(3+2\sqrt{5} \mid -\sqrt{5}\right)$.

(2) ***Vektoriell:***

Gleichung der Geraden (AC): $\quad y = 2x + 4$ bzw. $\ -2x + y = 4$.

Der Normalenvektor lautet also $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Er ist auch Normalenvektor für die beiden zu (AC) parallelen Tangenten.



Somit gilt für die Berührpunkte diese Berechnungsformel:

$$\overrightarrow{b_{1,2}} = \vec{m} \pm r\cdot\vec{n}^{\,o} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\quad B_1\left(3+2\sqrt{5} \mid -\sqrt{5}\right),\ \ B_2\left(3-2\sqrt{5} \mid \sqrt{5}\right)$

Die Tangentengleichungen erhält man über die Punkt-Steigungsform:

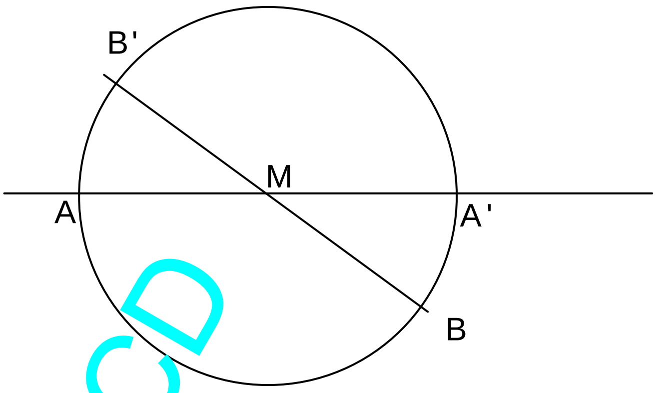
T_1: $\ y + \sqrt{5} = 2\left(x - 3 - 2\sqrt{5}\right)$ und T_2: $\ y - \sqrt{5} = 2\left(x - 3 + 2\sqrt{5}\right)$

Die Ergebnisse stehen oben.

d) **Spiegelung von A und B an M.**

(1) ***Nicht vektoriell:***

Man schneidet die Geraden (AM) und (BM) mit dem Kreis k und erhält so die gesuchten Spiegelbilder.



Da A und M beide auf der x-Achse liegen, ist A' leicht zu errechnen:

$$x_{A'} = x_M + r = 3 + 5 = 8 \quad \Rightarrow \quad A'(8\,|\,0).$$

Gerade (BM):

$$B(7\,|\,-3);\ M(3\,|\,0) \quad \Rightarrow \quad m_{BM} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$y - 0 = -\tfrac{3}{4}(x-3) \quad \Rightarrow \quad (BM):\quad y = -\tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{4}$$

k: $\quad (x-3)^2 + y^2 = 25$

Schnitt: $\quad (x-3)^2 + \left(-\tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{4}\right)^2 = 25$

$$x^2 - 6x + 9 + \tfrac{9}{16}x^2 - \tfrac{27}{8}x + \tfrac{81}{16} = 25 \quad |\cdot 16$$

$$16x^2 - 96x + 144 + 9x^2 - 54x + 81 = 400$$

$$25x^2 - 150x - 175 = 0 \quad |:25$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 = x_B \\ -1 = x_{B'} \end{cases}$$

y-Koordinate: $\quad y_{B'} = -\tfrac{3}{4}x_{B'} + \tfrac{9}{4} = \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{4} = 3$

Ergebnis: $\quad B'(-1\,|\,3)$

(2) ***Vektoriell:***

Die Spiegelung eines Punktes P an M geschieht durch diese Gleichung:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PM} = \vec{m} + (\vec{m} - \vec{x}) = 2\cdot\vec{m} - \vec{x}$$

Also folgt: $\quad \vec{a}\,' = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'(8\,|\,0)$

und $\quad \vec{b}\,' = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B'(-1\,|\,3).$

Das Viereck AA'BB' ist ein Parallelogramm, weil sich die Diagonalen gegenseitig halbieren. Für seinen Flächeinhalt gilt:

$$A_{PGr} = 2\cdot A_{AA'B'} = 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2r\cdot y_{B'} = 10\cdot 3 = 30\ \text{FE}.$$

CD!